

(20)

4/11

Παρατήρηση

Κάποιες φορές χρησιμοποιώντας την εφ. των προτέρων ως Jeffrey, μπορεί να καταλήξουμε (βλ. ασκηση 6) σε ένα αποτέλεσμα που δεν μπορεί να είναι σ.π.π. τότε λείπει ότι πρόκειται για μία ακατάλληλη εκ των προτέρων.

Κριτήρια αξιολόγησης εκτιμήσεων

1) Αμεροληψία: Ένας εκτιμητής $T = (X_1, \dots, X_n)$ είναι αμεροληπτός της $g(\theta)$ αν $E(T) = g(\theta)$

2) ΑΟΕΔ: Είναι ο αμεροληπτός εκτιμητής με την μικρότερη διακύμανση

Μεθοδολογίες εύρεσης ΑΟΕΔ

α) Κάτω φράξη ανισότητας Cramer-Rao.

Πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες οφελότητας-η εξασφάλιση της δεν είναι πάντα εύκολη.
Μια απ' αυτές είναι το π.ο. της $f(x|\theta)$ να είναι ανεξάρτητο απ' το θ .

Επιπλέον, πρέπει να πατήσω να επιτυγχάνεται το κ.φ. του Κ.Ρ.

Πλεονέκτημα: Αν η $f(x|\theta)$ είναι της μορφής

$$f(x|\theta) = c(\theta) h(x) \exp(Q(\theta)T(x)), \quad x \in \Lambda \text{ ανεξ. του } \theta$$

δηλ. $X \in$ στην επαθ. οικ. κατανομήν τότε

ικανοποιούνται οι συνθήκες οφελότητας, επίσης

το σ των ανισ. C-R επιτυγχάνεται ($\Rightarrow$):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = K(\theta, n)(U - g(\theta)) \quad \text{με } U: \text{ΑΟΕΔ της } g(\theta)$$

Παράδειγμα

Έστω ζ.δ. $X_1, \dots, X_n \sim P(\theta)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της θ ή θ^2 .

Λύση

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots \Leftrightarrow f(x|\theta) = e^{-\theta} \frac{1}{x!} e^{x \log \theta}$$

$$\pi f(x_i|\theta) = \pi \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\pi x_i!}$$

$$\log \pi f(x_i|\theta) = \sum x_i \log \theta - n\theta - \log \pi x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \pi f(x_i|\theta) = \frac{\sum x_i}{\theta} - n = \frac{n}{\theta} \left(\frac{\sum x_i}{n} - \theta \right) = \frac{n}{\theta} (\bar{X} - \theta)$$

$\Rightarrow \bar{X}: \text{AOED για } \theta$ (αποδεικνύεται εύκολα, βλέπουμε αμέσως).

Παρατήρηση

Αν $U: \text{AOED της } g(\theta)$ να ποκιντεί ως ισόζυγα στην ανισόζυγα $C-R$ τότε με την ανισόζυγα $C-R$ μπορεί να προσδιοριστούν AOED εκκλιγτες γραμμ. συναρτήσεων της $g(\theta)$ ($\alpha g(\theta) + \beta$).

ΔΕΝ μπορεί να βρωτε AOED της θ^2 με την $C-R$.

β) Θεώρημα Lehmann-Scheffe: Έστω ζ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από π.θ. π.ε.σ.π. $f(x|\theta)$. Έστω $T = T(X_1, \dots, X_n)$ επαρκής και πλήρης σ.σ. της θ και $U = U(T)$ αμέρ. της $g(\theta)$ τότε $U: \text{AOED της } g(\theta)$.

Επαρκής σ.σ. είναι εκείνη να περιέχει όλη την πληροφορία την διαθέσιμη από το δείγμα για την θ ορισμός.

Λέμε ότι η σ.σ. T είναι επαρκής για την θ αν η δειγματοληψία κατανομή $(X_1, \dots, X_n) | T$ είναι ανεξ. με θ .

Παραδοχικός Θεώρημα Neymann-Fisher

Η $T = T(X_1, \dots, X_n)$ είναι επαρκής $\Leftrightarrow \pi f(x_i|\theta) = g(T(x), \theta) h(x)$
 $\forall \theta \in \Theta$

Παρατήρηση

Αν η T είναι επαρκής για την θ είναι επαρκής και $\forall l-l$ μετασχηματισμός της θ

Παρατήρηση

Αν η T είναι επαρκής για την θ κάθε ένας $l-l$ μετασχηματισμός για την T είναι επαρκής για την θ

Ορισμός

Η Τ είναι μηδής σ.σ. για την θ αν -v

$$E(h(T)) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

$$E(h(T)) = \begin{cases} \int h(t) f_T(t) dt, & T \text{ συνεχής} \\ \sum_t h(t) P(T=t), & T \text{ διακριτή} \end{cases}$$

Συνέχεια παραδείγματα

$$\prod P(X_i | \theta) = \frac{\theta^{\sum X_i} e^{-n\theta}}{\prod X_i!} = g(\sum X_i, \theta) h(x) \quad (h(x) = \frac{1}{\prod X_i!})$$

$$E(h(T)) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\sum h(t) P(T=t) = 0$$

Γενικά

Έστω ζ.δ. $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{M}_{X_i}(t) = \mathcal{M}_X(t) = E(e^{tx})$

Στόχος: Προσδιορισμός της κατανομής του $\sum X_i = T$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T(t) &= E(e^{tT}) = E(e^{t \sum X_i}) = E(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}) \stackrel{X_1, \dots, X_n \text{ ανεξ.}}{=} \\ &= E(e^{tX_1}) \dots E(e^{tX_n}) \stackrel{\text{ισομετρία}}{=} (E(e^{tX_1}))^n = (\mathcal{M}_X(t))^n \end{aligned}$$

$X_i \sim P(\theta)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_i}(t) &= \mathcal{M}_X(t) = e^{\theta(e^t - 1)} \quad \text{τότε } T = \sum X_i \text{ έχει } \mathcal{M}_T(t) = (e^{\theta(e^t - 1)})^n \\ \Rightarrow \mathcal{M}_T(t) &= e^{n\theta(e^t - 1)} \quad \text{έπει } T \sim P(n\theta) \end{aligned}$$

$X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{X_i}(t) &= \mathcal{M}_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda \quad \text{τότε } T = \sum X_i \text{ έχει } \mathcal{M}_T(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n \\ \Rightarrow \mathcal{M}_T(t) &= \left(\frac{\lambda - t}{\lambda} \right)^{-n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda} \right)^{-n} \quad \text{έπει } T \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda}) \quad t < \lambda \end{aligned}$$

Άρα για τα παραδείγματα πιο πάνω

$$\sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{(n\theta)^t e^{-n\theta}}{t!} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} h(t) \frac{n^t \theta^t}{t!} = 0 \Rightarrow$$

$$h(0) = h(1) = h(2) = \dots = 0$$

ανδείξουμε ότι $T = \sum X_i$ επαρκής και πλήρης

$$E(T) \stackrel{T \sim P(n\theta)}{=} n\theta \Leftrightarrow E\left(\frac{T}{n}\right) = \theta \quad \text{έπει } \frac{T}{n} : \text{ΑΟΕΔ του } \theta$$

$$E(T^2) = \text{Var}(T) + (E(T))^2 \Leftrightarrow E(T^2) = u\theta + (u\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$E(T^2) = u\theta + u^2\theta^2 \Leftrightarrow E\left(\frac{T^2 - u\theta}{u^2}\right) = \theta^2 \xrightarrow{u\theta = E(T)} \frac{E(T^2) - E(T)}{u^2} = \theta^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{T^2 - T}{u^2}\right) = \theta^2 \text{ \textit{dpe} } \frac{T^2 - T}{u^2} \text{ AOEΔ: } \text{zoo } \theta^2$$

2ος παρ.

Θέλουμε να βρούμε $V(T)$: $E(V(T)) = \theta^2$ \textit{dpe} θ^2

$$\sum_{t=0}^{\infty} v(t) \frac{(u\theta)^t e^{-u\theta}}{t!} = \theta^2 \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v(t) u^t \theta^t}{t!} = \theta^2 e^{u\theta} = \theta^2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(u\theta)^t}{t!}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u^t \theta^{t+2}}{t!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{u^{t-2}}{t-2} \theta^t \text{ \textit{dpe} } \theta^2 \text{ \textit{dpe} } \theta^2 \text{ \textit{dpe} } \theta^2$$

$$v(0) = 0, \quad v(1) = 0$$

$$\forall t \geq 2: v(t) \frac{u^t}{t!} = \frac{u^{t-2}}{(t-2)!} \Rightarrow v(t) = \frac{t!}{(t-2)! u^2} = \frac{(t-1)t}{u^2}$$

Παρ.

Έστω 2.δ. $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$ AOEΔ. zoo θ και θ ;

Παρ.

$$P(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta \Rightarrow 0 < x_1 < \theta \Rightarrow 0 \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq \theta < +\infty$$

$$\prod P(x_i|\theta) = \prod \frac{1}{\theta} = \theta^{-n}, \quad x_{(n)} < \theta \Rightarrow 0 < x_n < \theta$$

$$\text{dpe } \prod f(x_i|\theta) = \theta^{-n} \underbrace{I_{(x_{(n)}, \theta)}(\theta)}_{g(x_{(n)}, \theta)} \underbrace{I_{(0, x_{(1)})}(x_{(1)})}_{I_A(x)} \quad I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$E(h(T)) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(t) = 0 \quad \forall t \text{ \textit{dpe} } E(h(T)) = \int h(t) f_T(t) dt$$

Εύρεση της κατανομής του $X_{(n)}$

Μέθοδος της απ. σκ. κατανομής: Θέλουμε να βρούμε $F_{X_{(n)}}(y)$

$$F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} \leq y) = P(X_i \leq y \quad \forall y) \xrightarrow[\text{ανεξ.}]{X_1, \dots, X_n} P(X_1 \leq y) \dots P(X_n \leq y)$$

$$= P^n(X \leq y) = F_X^n(y) \text{ \textit{dpe} }$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = \frac{d}{dy} F_{X_{(n)}}(y) = n F_X^{n-1}(y) f_X(y)$$

Εύρεση της κατανομής του $X_{(1)}$ (η 2η μέθοδος α.σ.κ.)

$$F_{X_{(1)}}(y) = P(X_{(1)} \leq y) = 1 - P(\min X_i \geq y) = 1 - P(X_i \geq y \quad \forall y) \xrightarrow[\text{ανεξ.}]{X_1, \dots, X_n}$$

$$\text{dpe } F_{X_{(1)}}(y) = 1 - P(X_1 \geq y) \dots P(X_n \geq y) \xrightarrow{\text{ισοδύναμο}} 1 - P^n(X > y)$$

$$= 1 - [1 - F_X(y)]^n$$

$$\text{dpe } f_{X_{(1)}}(y) = \frac{d}{dy} () = n [1 - F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

on X_{GE} n.o. 2

$$F_T(t) = n F_X^{n-1}(t) f_X(t)$$

$$F_X(y) = P(X \leq y) = \int_0^y \frac{1}{\theta} dx = \frac{y}{\theta}, \quad 0 \leq y \leq \theta$$

$y \in (0, \theta)$

$$\text{d.h. } f_T(t) = n \frac{t^{n-1}}{\theta^{n-1}} \frac{1}{\theta} = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < t < \theta$$

$$E(h(T)) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \int_0^\theta h(t) \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} dt = 0 \Rightarrow \int_0^\theta h(t) t^{n-1} dt = 0$$
$$\Rightarrow h(\theta) \theta^{n-1} = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(\theta) = 0 \quad \forall \theta$$

general case 2.2055

$$E(V(T)) = \theta^k \Rightarrow \int_0^\theta V(t) \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} dt = \theta^k \Rightarrow$$
$$\int_0^\theta V(t) t^{n-1} dt = \frac{\theta^{n+k}}{n} \Rightarrow V(\theta) \theta^{n-1} = \frac{n+k}{n} \theta^{n+k-1}$$
$$V(\theta) = \frac{n+k}{n} \frac{\theta^{n+k-1}}{\theta^{n-1}} \Rightarrow V(\theta) = \frac{n+k}{n} \theta^k \quad \text{also}$$
$$V(T) = \frac{n+k}{n} T^k$$

Leibniz's rule

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} f(x, \theta) dx = \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta) dx + f(\beta(\theta), \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \beta(\theta) - f(\alpha(\theta), \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha(\theta)$$

AUFGABE

Seien z.B. $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. mit $e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta$

Definition

n.o. mit θ $\rightarrow X_{(n)}$

n.o. mit $-\infty$ $\rightarrow X_{(1)}$

n.o. mit $-\infty$ $\rightarrow (X_{(1)}, X_{(n)})$